(1)

Analiz III (A-B) Bütünleme Sınavı Yanıt Anahtarı

1) $E.D \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} e^{-|x|} dx = \lim_{t \to \infty} \left(\int_{-t}^{0} e^{x} dx + \int_{0}^{t} e^{-x} dx \right)$

$= \lim_{t \to \infty} \left(e^{x} \Big|_{-t}^{0} + (-e^{-x}) \Big|_{0}^{t} \right)$

$= \lim_{t \to \infty} \left[(1 - e^{-t}) + (-e^{-t} + 1) \right] = 2$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. Bu durumda

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ veya $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$ yazılır.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|2^n a_n|} = \lim_{n \to \infty} 2 \sqrt[n]{|a_n|} = 2 \cdot \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{R}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^n \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$

$= \frac{1}{e} \cdot R$

3) $\forall n$ için $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}$ denirse, f_n fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli türevlenebilirdir. Yine her $x \in \mathbb{R}$ için

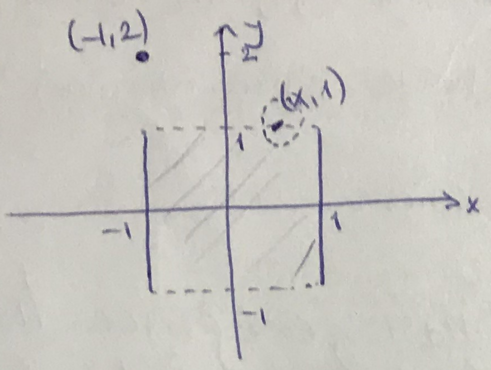
$\left|\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi yakınsak olduğundan

Weierstrass-M testinden dolayı $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}$ serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla noktasal yakınsaktır.

Şimdi $f_n'(x) = \frac{1}{n^3}\cos\frac{x}{n}$ olmak üzere, f_n fonksiyonlarının türev fonksiyonlarından oluşan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{x}{n}$ serisini alalım. Yine her $x \in \mathbb{R}$ için $\left|\frac{1}{n^3}\cos\frac{x}{n}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass M-testinden dolayı, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ serisi düzgün yakınsaktır.

O halde verilen seri, $\mathbb{R}$ üzerinde terim terime türevlenebilir.

4) $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 < y < 1 \} \cup \{(-1,2)\}$



$A = ([-1,1] \times (-1,1)) \cup \{(-1,2)\}$

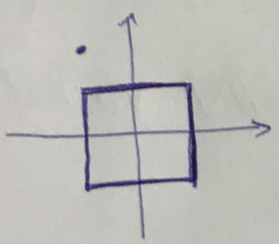
şeklinde yazılabilir.

a) $\bar{A} = ([-1,1] \times [-1,1]) \cup \{(-1,2)\}$

b) $\mathring{A} = (-1,1) \times (-1,1)$

Ancak $(-1,2) \in A$ noktası bir iç nokta değildir. Çünkü $B((-1,2), r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı yoktur.

c) $\partial A = \bar{A} - \mathring{A} = (\{-1,1\} \cup [-1,1]) \cup ([-1,1] \times \{-1,1\}) \cup (-1,2)$



d) $\text{değ} A = \bar{A}$ olduğundan $\text{değ} A = ([-1,1] \times [-1,1]) \cup \{-1,2\}$

e) $A' = ?$

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 < y < 1 \} = [-1,1] \times (-1,1)$

kümesinden $(x,1)$ şeklindeki noktaları alalım. (şekle bakınız.)

$(x,1)$ merkezli her açık yuvar A kümesinde kendinden başka en az bir nokta içerdiğinden, bu nokta A kümesinin bir yığılma noktasıdır. Bu işlem, $[-1,1] \times (-1,1)$ karesindeki her nokta için yapılırsa, buradaki her nokta bir yığılma noktası olur. Ancak

$$\left(B\left((-1,2),\tfrac{1}{2}\right)-(-1,2)\right)\cap A=\phi$$

olduğundan $(-1,2)$, noktası A kümesinin yığılma noktası değildir. Bu nokta bir ayrık noktadır. O halde yığılma noktaları kümesi

$A' = [-1,1]\times[-1,1]$ kümesidir.

5- (y_k) dizisinin sınırlı olması gereğince her $k\in\mathbb{N}$ için $\|y_k\|\leq M$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır.

$\forall \varepsilon>0$ verilsin.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ olması gereğince $\forall k>K$ için

$$\|x_k-0\|=\|x_k\|<\varepsilon/M$$

olacak şekilde en az bir $K\in\mathbb{N}$ vardır.

O zaman her $k>K$ için

$$|\langle x_k,y_k\rangle-0|=|\langle x_k,y_k\rangle|\leq\|x_k\|\cdot\|y_k\|\leq M\,\|x_k\|\cdot M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

olur. Bu isteneni verir. (Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanıldı).

6- Bileşen dizilerinin limitlerini bulalım:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=\lim_{k\to\infty}e^{\ln(1+\frac{1}{k})^k}=\lim_{k\to\infty}e^{k\ln(1+\frac{1}{k})}$$

$$=\lim_{k\to\infty}e^{\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{(1/k)}}=e^{\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{(1/k)}}=e^{\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(1+\frac{1}{k})}\cdot(-\frac{1}{k^2})}{(-1/k^2)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{k})}}=e^1=e,$$

$$\lim_{k\to\infty}k\sin\frac{1}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sin(1/k)}{(1/k)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln k}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(1/k)}{1}=0.$$

İlgili teorem gereğince

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k, k\sin\frac{1}{k}, \frac{\ln k}{k}\right)=(e,1,0)$$

olur.

7- $\mathbb{R}^n \setminus E$ nin açık olduğunu göstermeliyiz.

$\mathbb{R}^n \setminus E = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|<s\}\cup\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|>r\}$

dir.

$\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus E$ için $\|x\|<s \ \vee \ \|x\|>r$.

olur.

$\|x\|<s \Rightarrow a=s-\|x\|>0$ olup,

$B(x,a)\subset\mathbb{R}^n\setminus E$ olur, çünkü

$\forall y\in B(x,a) \Rightarrow \|y-x\|<a=s-\|x\|$

$\Rightarrow \|y\|\leq\|x\|+\|y-x\|<s \Rightarrow y\in\mathbb{R}^n\setminus E$

ve

$\|x\|>r \Rightarrow b=\|x\|-r>0$ olup,

$B(x,b)\subset\mathbb{R}^n\setminus E$ olur, çünkü

$\forall y\in B(x,b)\Rightarrow \|y-x\|<b=\|x\|-r$

$\Rightarrow r<-\|y-x\|+\|x\|\leq\|x+(y-x)\|=\|y\|$

$\Rightarrow y\in\mathbb{R}^n\setminus E$

elde edilir.

(6)

8- $A_1, A_2, ..., A_k$ ler $\mathbb{R}^n$ de sonlu tane açık küme olsun. ve $\forall x \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ verilsin. O zaman $\forall i = 1, 2, ..., k$ için $x \in A_i$ ve A_i ler açık olduğundan

$$B(x, r_i) \subset A_i$$

olacak şekilde $r_i > 0$ sayıları vardır.
$r := \min\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ denirse her $i = 1, ..., k$ için $B(x, r) \subset A_i$ ve dolayısıyla $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ olur. Keyfi seçilen her x noktası bir iç nokta olduğundan $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ açıktır.

Ayrıca her $k = 1, 2, ...$ için $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ açık aralıklar $\mathbb{R}$ de birer açık küme, ama $\bigcap_{k=1}^{\infty} (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \{0\}$ olduğundan sonsuz sayıdaki açık kümelerin $\{0\}$ kesişim kümesi kapalıdır. O halde $\mathbb{R}^n$ de herhangi sayıdaki açık kümenin kesişimi açık olmayabilir.